Nombres complexes

£ désigne l'ensemble des nombres complexes

$z \in £ \Leftrightarrow z = a + ib$, avec $a \in IR$, $b \in IR$. $a = \Re e(z)$ et $b = \Im m(z)$.

$z = z' \Leftrightarrow \Re e(z) = \Re e(z')$ et $\Im m(z) = \Im m(z')$,

Conjugué d'un nombre complexe

Soit le nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont des réels. Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$; $n \in \not{c}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$;pour $z \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$,

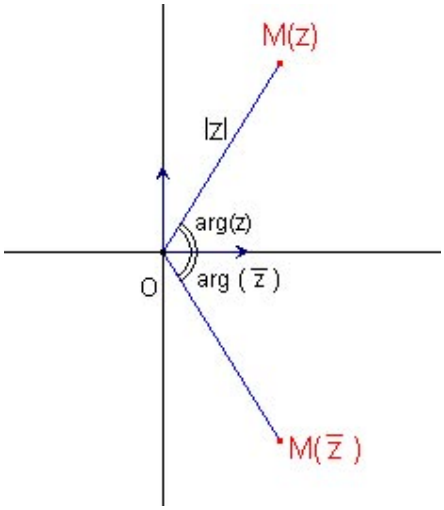
$\Re e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $\Im m(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ et $\bar{\bar{z}} = z$

Argument d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit z un nombre complexe non nul et M son image.

On appelle argument de z et on note arg (z) toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{OM})$



Propriétés :

Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

arg (z) ≡ − arg (z) [2π].

arg(−z) ≡ π+arg(z) [2π].

Si k>0 alors arg(kz)≡arg(z) [2π]

Si k<0 alors arg(kz)≡π + arg(z) [2π

Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Ecriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z = x + iy, le point M(x, y) son image alors

- $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \vec{OM})(2\pi)$

  si $\theta \equiv \arg(z)(2\pi)$ alors $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, r>0 alors $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta\ (2\pi)$
- Si $z = re^{i\theta}$ alors $-z = -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$ et $\bar{z} = re^{-i\theta}$

© najah.com®

Module et argument d'un produit ou d'un quotient

Soit z et z' deux nombres complexe non nuls

$|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(z\,z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$

$|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ (2\pi)$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')(2\pi)$

Conséquences

Soit deux réels θ et θ' : $e^{iq} \times e^{iq'} = e^{i(q+q')}$, $\frac{1}{e^{iq}} = e^{-iq}$, $\frac{e^{iq}}{e^{iq'}} = e^{i(q-q')}$, $\left(e^{iq}\right)^n = e^{inq}$ $n \in \mathbb{Z}$

Formules de trigonométrie

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (formules d'Euler)

- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (formule de Moivre)

Application des nombres complexes à la géométrie

Soit $(O,\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé directe, A et B deux points du plan d'affixes z_A et z_B .

$z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u},\overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.

Racines nièmes d'un nombre complexe non nul

L'équation $z^n = a$, $n \geq 1$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $a = r\,e^{i\theta}$ a pour solutions : les nombres complexes

$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0,1,...;n-1\}$ en particulier si a = 1 les solution sont

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1,...;n-1\}$ et sont appelées les racines nièmes de l'unité.

Conséquence :

- Pour tout nombre complexe Z = a+ib de $\mathbb{C}$, il existe deux nombres complexes opposés dont le carré est égal à Z

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xyb > 0 \end{cases}$$

Théorème

Soit a, b et c des nombres complexes tels que a≠0.

L'équation az2 +bz+c=0, admet dans **C** , deux solutions (éventuellement confondues) définies par

$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée du discriminant

Conséquences

Si $z_1$et z_2 sont les solutions de az^2 +bz+c=0, a ≠ 0, alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$,

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.

© najah.com®

© najah.com®